指数格子と関連した微分差分方程式

成田, 和明

指数格子と関連した微分差分方程式

京大理 生物物理 寺本研　　成　田　和　明

§1. まえがき

この論文には前の投稿「指数格子の研究」にやり残している計算をまとめてあります。従って前の内容と一部重複する所がありますが，ある程度新しい事も含んでいますので物性研究に投稿する次第です。

§2. 序　論

Hamiltonian $H=\sum_n \frac{p^2}{2m}+\sum_n \phi(u_n-u_{n-1})$ をもつ一次元格子で，$\phi(r)=\frac{a}{b}e^{-br}+ar$ の場合は指数格子とよばれ，$r_n=u_n-u_{n-1}$ に対して，無次元化ののち

$$\ddot{r}_n = e^{r_{n+1}}+e^{r_{n-1}}-2e^{r_n} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

とあらわされる。他の三つの非線型格子

$$\dot{a}_n=(a_{n-1}-a_{n+1})a_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$$\dot{b}_n=(b_{n-1}-b_{n+1})b_n^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ③$$

$$\dot{c}_n=(c_{n-1}-c_{n+1})(1-c_n^2) \quad \cdots\cdots \quad ④$$

との変換関係は

$$e^{r_n}=a_n a_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑤ \qquad a_n=b_n b_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑥$$

$$c_n=(1+c_n)(1-c_{n+1}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑦$$

で与えられる。①②③④が主な方程式であるが以下ではこれらの方程式と関連のあるすこし複雑な形の微分差分方程式の変換関係とwave trainを表わす解について述べる。

§3. 4つの非線型微分差分方程式

次の型の四つの方程式を考える。

$$\text{A)}\quad \dot{u}_i = \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{(u_{i-1} + u_i)(u_i + u_{i+1})} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

$$\text{B)}\quad \dot{v}_i = 4\frac{v_{i-1} - v_{i+1}}{(v_{i-1} + v_1)(v_i + v_{i+1})}\, v_i^{\,2} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

$$\text{C)}\quad \dot{x}_i = 4\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{(x_{i-1} + x_i)(x_i + x_{i+1})}(1 - x_i^{\,2}) \cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

$$\text{D)}\quad \dot{y}_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{(y_{i-1} + y_i)(y_i + y_{i+1})}(1 - y_i^{\,2})^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

A)，B)，C)，D)は以下のように変形できる。

① A)について

$$\dot{s}_i = \frac{\sqrt{s_{i-1} + s_i} - \sqrt{s_i + s_{i+1}}}{\sqrt{s_{i-1} + s_i} + \sqrt{s_i + s_{i+1}}} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑫$$

という方程式を考えると

$$\dot{s}_i + \frac{1}{\dot{s}_i} = 2\frac{s_{i-1} + s_{i+1} + 2s_i}{s_{i-1} - s_{i+1}}$$

$$\therefore\quad \frac{\dot{s}_i}{1 + \dot{s}_i^{\,2}} = \frac{1}{2}\,\frac{s_{i-1} - s_{i+1}}{s_{i-1} + s_{i+1} + 2s_i} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑬$$

$u_i^{\,2} = s_i + s_{i+1}$ ……………… ⑭とおくと

$$\dot{s}_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{u_{i-1} + u_i}$$

したがって

$$2u_i\dot{u}_i = \dot{s}_i + \dot{s}_{i+1}$$

$$= 2\frac{(u_{i-1} - u_{i+1})u_i}{(u_{i-1} + u_i)(u_i + u_{i+1})}$$

$$\therefore\quad \dot{u}_i = \frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{(u_{i-1} + u_i)(u_i + u_{i+1})}$$

$$= \frac{1}{u_i + u_{i+1}} - \frac{1}{u_{i-1} + u_i}$$

$$= b_i - b_{i+1}$$

ここに

$$b_i = \frac{1}{u_i + u_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑮$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b_i}\right) = -\frac{\dot{b}_i}{b_i^2} = \dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}$$

$$= b_{i+1} - b_{i-1}$$

よって

$$\dot{b}_i = (b_{i-1} - b_{i+1})\, b_i^2$$

⑵　B）について

$$\dot{t}_i = 2\frac{t_{i-1} - t_{i+1}}{t_{i-1} + t_{i+1}}\, t_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑯$$

という方程式を考える。

$$v_i = t_i\, t_{i+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑰$$ とおくと

$$\frac{\dot{t}_i}{t_i} = 2\,\frac{v_{i-1} - v_i}{v_{i-1} + v_i}$$

したがって

$$\frac{\dot{v}_i}{v_i} = \frac{\dot{t}_i}{t_i} + \frac{\dot{t}_{i+1}}{t_{i+1}}$$

$$= 4\,\frac{(v_{i-1} - v_{i+1})\, v_i}{(v_{i-1} + v_i)(v_i + v_{i+1})}$$

又は

$$\dot{v}_i = 4 \frac{v_{i-1} - v_{i+1}}{(v_{i-1} + v_i)(v_i + v_{i+1})} v_i^2$$

ここで

$$c_i = \frac{v_i - v_{i+1}}{v_i + v_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑱$$ とおくと

$$\frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{1 - c_i}{1 + c_i}$$

$$\therefore \quad \frac{\dot{v}_{i+1}}{v_{i+1}} - \frac{\dot{v}_i}{v_i} = -\frac{2\dot{c}_i}{1 - c_i^2}$$

一方 $\dfrac{\dot{v}_i}{v_i} = 2(c_{i-1} + c_i)$ だから

$$\dot{c}_i = (c_{i-1} - c_{i+1})(1 - c_i^2)$$

③ C）について

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} = 4 \frac{\sqrt{1 + m_{i-1}m_i} - \sqrt{1 + m_i m_{i+1}}}{\sqrt{1 + m_{i-1}m_i} + \sqrt{1 + m_i m_{i+1}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ㉑$$

という方程式を考える。

$$\frac{\dot{m}_i}{4m_i} + \frac{4m_i}{\dot{m}_i} = 2 \frac{2 + m_i(m_{i-1} + m_{i+1})}{m_i(m_{i-1} + m_{i+1})}$$

したがって

$$\frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_i^2 + 16m_i^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{m_{i-1} - m_{i+1}}{2 + m_i(m_{i-1} + m_{i+1})} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑳$$

ここで

$$\tilde{x}_i^2 = 1 + m_i m_{i+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑲$$ とおくと

$m_i m_{i+1} = \tilde{x}_i^2 - 1$ より

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} + \frac{\dot{m}_{i+1}}{m_{i+1}} = \frac{2\tilde{x}_i \dot{\tilde{x}}_i}{\tilde{x}_i^2 - 1}$$

ここで

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} = 4\,\frac{\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_i}{\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i} \quad \text{だから}$$

$$\text{左辺} = \frac{8\tilde{x}_i\,(\tilde{x}_{i-1} - \tilde{x}_{i+1})}{(\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})}$$

よって

$$\dot{\tilde{x}}_i = 4\,\frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1}}{(\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})}\,(1 - \tilde{x}_i^{\,2})$$

ここで $\xi_i = \dfrac{\tilde{x}_{i+1} + 1}{\tilde{x}_i + 1}$ とおく

$$\frac{\dot{\xi}_i}{\xi_i} = \frac{\dot{\tilde{x}}_{i+1}}{\tilde{x}_{i+1} - 1} - \frac{\dot{\tilde{x}}_i}{\tilde{x}_i + 1}$$

$$= \frac{1}{\tilde{x}_{i+1} - 1} \cdot \frac{4(\tilde{x}_{i+2} - \tilde{x}_i)(1 - \tilde{x}_{i+1}^{\,2})}{(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})(\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i+2})}$$

$$- \frac{1}{\tilde{x}_i + 1} \cdot \frac{4(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1})(1 - \tilde{x}_i^{\,2})}{(\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i)(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1})}$$

$$= -4\left[(1 + \tilde{x}_{i+1})\left(\frac{1}{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}} - \frac{1}{\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i+2}}\right)\right.$$

$$\left. + (1 - \tilde{x}_i)\left(\frac{1}{\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i} - \frac{1}{\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}}\right)\right]$$

$$= -4\left[1 - \frac{\tilde{x}_{i+1} + 1}{\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_{i+2}} - \frac{\tilde{x}_i - 1}{\tilde{x}_{i-1} + \tilde{x}_i}\right]$$

$$= -4\left[1-\frac{1}{1+\dfrac{\tilde{x}_{i+2}-1}{\tilde{x}_{i+1}+1}}-\frac{\dfrac{\tilde{x}_{i}-1}{\tilde{x}_{i-1}+1}}{1+\dfrac{\tilde{x}_{i}-1}{\tilde{x}_{i-1}+1}}\right]$$

$$= -4\left[1-\frac{1}{1+\xi_{i+1}}-\frac{\xi_{i-1}}{1+\xi_{i-1}}\right]$$

$$= -2\left[\frac{1-\xi_{i-1}}{1+\xi_{i-1}}-\frac{1-\xi_{i+1}}{1+\xi_{i+1}}\right]$$

$$= -2\,(c_{i-1}-c_{i+1})$$

ここに

$$c_i=\frac{1-\xi_i}{1+\xi_i}$$

$$=\frac{\tilde{x}_i-\tilde{x}_{i+1}+2}{\tilde{x}_i+\tilde{x}_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ㉒$$ とおくと

$$\xi_i=\frac{1-c_i}{1+c_i}$$ だから

$$\frac{\dot{\xi}_i}{\xi_i}=-\frac{2\dot{c}_i}{1-c_i^2}$$

したがって

$$\dot{c}_i=(c_{i-1}-c_{i+1})(1-c_i^2)$$

④ D) について

$$\xi_i=\frac{1}{2}\left(z_i+\frac{1}{z_i}\right)$$

$$z_i=\frac{1-y_i}{1+y_i}$$

とすると

$$\xi_i = \frac{1+y_i^2}{1-y_i^2} \qquad \therefore \quad y_i^2 = \frac{\xi_i - 1}{\xi_i + 1}$$

また

$$z_i = \frac{\sqrt{\xi_i+1} + \sqrt{\xi_i-1}}{\sqrt{\xi_i+1} - \sqrt{\xi_i-1}}$$

ここで方程式系

$$\xi_i \left(= \frac{1}{2}\left(z_i + \frac{1}{z_i} \right) \right) = v_i + v_{i+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{㉓}$$

$$\dot{v}_i = 2\frac{z_{i-1} - z_i}{1 - z_{i-1} z_i}$$

を考える。この時

$$y_i^2 = \frac{v_i + v_{i+1} - 1}{v_i + v_{i+1} + 1} \quad , \quad 又 \quad z_i = \frac{a_i + b_i}{a_i - b_i}$$

（ここに　$a_i \equiv \sqrt{\xi_i + 1}$　　$b_i \equiv \sqrt{\xi_i - 1}$）であるから，

$$\dot{v}_i = 2\frac{a_{i-1} b_i - a_i b_{i-1}}{a_{i-1} b_i + a_i b_{i-1}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{(\xi_{i-1}+1)(\xi_i-1)} - \sqrt{(\xi_{i-1}-1)(\xi_i+1)}}{\sqrt{(\xi_{i-1}+1)(\xi_i-1)} + \sqrt{(\xi_{i-1}-1)(\xi_i+1)}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{(v_{i-1}+v_i+1)(v_i+v_{i+1}-1)} - \sqrt{(v_{i-1}+v_i+1)(v_i+v_{i+1}+1)}}{\sqrt{(v_{i-1}+v_i+1)(v_i+v_{i+1}-1)} + \sqrt{(v_{i-1}+v_i-1)(v_i+v_{i+1}+1)}}$$

よって

$$\frac{2\dot{v}_i}{4+\dot{v}_i^2} = \frac{1}{\frac{2}{\dot{v}_i} + \frac{\dot{v}_i}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{(v_{i-1}+v_i)(v_i+v_{i+1})-1}$$

$$\therefore\ \frac{\dot{v}_i}{4+\dot{v}_i^{\,2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{(v_{i-1}+v_i)(v_i+v_{i+1})-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉔$$

この時

$$\frac{d}{dt}\left(z_i+\frac{1}{z_i}\right)=-\frac{1-z_i^{\,2}}{z_i^{\,2}}\dot{z}_i=\frac{d}{dt}(2\xi_i)=2(\dot{v}_i+\dot{v}_{i+1})$$

$$=4\cdot\frac{(z_{i-1}-z_{i+1})(1-z_i^{\,2})}{(1-z_{i-1}z_i)(1-z_i z_{i+1})}$$

従って

$$\dot{z}_i=-4\frac{z_{i-1}-z_{i+1}}{(1-z_{i-1}z_i)(1-z_i z_{i+1})}z_i^{\,2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉕$$

$$=2\cdot\left(\frac{1+z_i z_{i+1}}{1-z_i z_{i+1}}-\frac{1+z_{i-1}z_i}{1-z_{i-1}z_i}\right)$$

$$=2(c_i-c_{i-1})$$

ここに

$$c_i\equiv\frac{1+z_i z_{i+1}}{1-z_i z_{i+1}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1-y_i}{1+y_i}\cdot\dfrac{1-y_{i+1}}{1+y_{i+1}}}{1-\dfrac{1-y_i}{1+y_i}\cdot\dfrac{1-y_{i+1}}{1+y_{i+1}}}$$

$$=\frac{1+y_i y_{i+1}}{y_i+y_{i+1}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ㉖$$

又，$\quad z_i z_{i+1}=\dfrac{c_i-1}{c_i+1}$ より

$$\frac{\dot{z}_i}{z_i}+\frac{\dot{z}_{i+1}}{z_{i+1}}=\frac{2\dot{c}_i}{c_i^{\,2}-1}$$

一方左辺 $=2\,(c_i-c_{i-1}+c_{i+1}-c_i)=2\,(c_{i+1}-c_{i-1})$

$\therefore\quad \dot{c}_i=(c_{i-1}-c_{i+1})(1-c_i^{\,2})$

又 $\dfrac{\dot{z}_i}{z_i}=\dfrac{-2\dot{y}_i}{1-y_i^{\,2}}=2\,(c_i-c_{i-1})$

$$=2\left(\frac{1+y_i\,y_{i+1}}{y_i+y_{i+1}}-\frac{1+y_{i-1}\,y_i}{y_{i-1}+y_i}\right)$$

$$=2\,\frac{(y_{i-1}-y_{i+1})(1-y_i^{\,2})}{(y_i+y_{i+1})(y_{i-1}\ y_i)}$$

よって $\quad \dot{y}_i=\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{(y_{i-1}+y_i)(y_i+y_{i+1})}\,(1-y_i^{\,2})^2 \quad\cdots\cdots\cdots\quad ㉗$

ここで $\quad b_i=\dfrac{2\,i}{\dfrac{1}{z_{i+1}}-z_i}\qquad$（ i は虚数単位 ）とおく。

$$b_i=\frac{2\,i}{\dfrac{1+y_{i+1}}{1-y_{i+1}}-\dfrac{1-y_i}{1+y_i}}$$

$$=i\,\frac{(1+y_i)(1-y_{i+1})}{y_i+y_{i+1}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad ㉘$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b_i}\right)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\,i}\left(\frac{1}{z_{i+1}}-z_i\right)\right\}=-\frac{1}{2\,i}\left(\frac{\dot{z}_{i+1}}{z_{i+1}^{2}}+\dot{z}_i\right)$$

$$=-\frac{2}{i}\left\{\frac{z_{i+2}-z_i}{(1-z_i\,z_{i+1})(1-z_{i+1}\,z_{i+2})}+\frac{(z_{i+1}-z_{i-1})\,z_i^{\,2}}{(1-z_{i-1}\,z_i)(1-z_i\,z_{i+1})}\right\}$$

$$= -\frac{2}{i}\left\{ \frac{\dfrac{1}{z_i} - \dfrac{1}{z_{i+2}}}{\left(\dfrac{1}{z_i} - z_{i+1}\right)\left(\dfrac{1}{z_{i+2}} - z_{i+1}\right)} + \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{\left(\dfrac{1}{z_i} - z_{i-1}\right)\left(\dfrac{1}{z_i} - z_{i+1}\right)} \right\}$$

$$= -\frac{2}{i}\left\{ \frac{1}{\dfrac{1}{z_{i+2}} - z_{i+1}} - \frac{1}{\dfrac{1}{z_i} - z_{i+1}} + \frac{1}{\dfrac{1}{z_i} - z_{i+1}} - \frac{1}{\dfrac{1}{z_i} - z_{i-1}} \right\}.$$

$$= b_{i+1} - b_{i-1}$$

よって　$\dot{b}_i = (b_{i-1} - b_{i-1}) b_i^2$

⑤　§3のまとめ

方程式A)，B)，C)，D) より次の変換

$$b_i = \frac{1}{u_i + u_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑮$$

$$c_i = \frac{v_i - v_{i+1}}{v_i + v_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑯$$

$$c_i = \frac{x_i - x_{i+1} + 2}{x_i + x_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ㉒$$

$$b_i = i\,\frac{(1 + y_i)(1 - y_{i+1})}{y_i + y_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ㉘$$

$$c_i = \frac{1 + y_i\, y_{i+1}}{y_i + y_{i+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ㉖$$

により，方程式

$$\dot{b}_i = (b_{i-1} - b_{i+1}) b_i^2, \quad \dot{c}_i = (c_{i-1} - c_{i+1})(1 - c_i^2)$$

が導かれる。A)，B)，C)，D)の(補助)方程式はそれぞれ⑬，⑯，⑳，㉔である。

§4　生物物理学との関連

(1)　B)について

a)次のような反応系を考える。

$$\left.\begin{array}{l} E_i + X_{i-1} \xrightarrow{k_i} E_i X_{i-1} \\ E_i X_{i-1} + X_i \xrightarrow{K_i} E_i + 2X_i \end{array}\right\} \text{定常条件}$$

E_i 又は $E_i X_{i-1}$ に着目して定常状態の条件より

$$k_i [E_i][X_{i-1}] = K_i [E_i X_{i-1}][X_i]$$

よって

$$[E_i X_{i-1}] = \frac{k_i [X_{i-1}]}{k_i [X_i]} [E_i]$$

$[E_i] + [E_i X_{i-1}] = e_i$ (保存)より

$$[E_i] = \frac{e_i}{1 + \dfrac{k_i [X_{i-1}]}{K_i [X_i]}} = \frac{e_i K_i [X_i]}{K_i [X_i] + k_i [X_{i-1}]}$$

よって

$$[E_i X_{i-1}] = \frac{e_i k_i [X_{i-1}]}{K_i [X_i] + k_i [X_{i-1}]}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[X_i]}{dt} &= -k_{i+1} [E_{i+1}][X_i] + K_i [E_i X_{i-1}][X_i] \\ &= -\frac{k_{i+1} e_{i+1} K_{i+1} [X_{i+1}][X_i]}{K_{i+1} [X_{i+1}] + k_{i+1} [X_i]} \\ &\quad + \frac{K_i e_i k_i [X_{i-1}][X_i]}{K_i [X_i] + k_i [X_{i-1}]} \end{aligned}$$

ここで仮定　$k_i = K_i = k$，　$e_i = e$ を置くと

$$\frac{d[X_i]}{dt} = ke\frac{[X_{i-1}] - [X_{i+1}]}{([X_{i-1}] + [X_i])([X_i] + [X_{i+1}])}[X_i]^2$$

これはB）式に変形できる。

b）次のような反応系

$$\left.\begin{array}{l} E_i + X_i \xrightarrow{k_i} E_i X_i \\ E_i X_i + X_{i-1} \xrightarrow{K_i} E_i + 2X_i \end{array}\right\} \text{定常条件}$$

に於いても全く同様にして B）式が誘導できる。

② C）式について

C）式に対応する反応系は

$$X_{i-1} + E_i X_i \xrightarrow{\alpha_i} X_i + E_i X_i$$

$$E_i + X_{i-1} \rightleftarrows E_i X_{i-1} \qquad [\text{速い平衡，定数 } k_i]$$

$$E_i + X_i \rightleftarrows E_i X_i \qquad [\text{速い平衡，定数 } K_i]$$

で定数が適当な一定値をとった時であるが，これは非常に非現実的な反応系模型となっている。

③ A)，D）二式は流入項と流出項の差の形に書直せないので，対応する反応系模型は存在しない。

§5 解を求める為の準備

——— 対称な双二次式 ———

Jacobiの楕円函数 $x_i = \mathrm{sn}\,X$，$\mathrm{cn}\,X$，$\mathrm{dn}\,X$（$X = \alpha i + \beta t$）に対する加法定理を差当って次のような記号を使って書いておく。但し，加法定理の内容がこれで尽されているという意味ではないのは勿論である。

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = 2A\frac{\dot{x}_i}{x_i^2 - D^2}$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}} = 2B\frac{x_i}{x_i^2 - D^2}$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} \cdot x_{i-\frac{1}{2}} = -D^2\frac{x_i^2 - C^2}{x_i^2 - D^2}$$

ここで $C \cdot D = K$（定数）であり, $B^2 = (1 - D^2)(K^2 - D^2)$ が満足されていることに注意。次に対称な双二次式 $L(x, y)$ を次式で定義する。

$$(x_{i+\frac{1}{2}} + R)(x_{i-\frac{1}{2}} + R) = \frac{L(x_i, R)}{x_i^2 - D^2}$$

この時,

$$L(x, y) = x^2y^2 - D^2(x^2 + y^2) + 2Bxy + K^2$$

$\therefore$ $L(x, y) = L(y, x)$ である。

又, $L(x, \pm 1) = (1 - D^2)(x_i \pm G)^2$

$$L(x, \pm K) = (K^2 - D^2)(x_i \pm H)^2$$

$$G = \frac{B}{1 - D^2}, \quad H = \frac{K \cdot B}{K^2 - D^2}, \quad G \cdot H = K$$

も確かめられる。

§6 解の求め方

① A) 式の解

A) 式は方程式系

$$\dot{s}_i = \frac{u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}}{u_{i-\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots ㉘$$

$$u_i^2 = s_{i-\frac{1}{2}} + s_{i+\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots ㉙$$

と同値であることは前に述べた。

$$s_i = a\frac{x_i + b}{x_i + 1} \quad , \qquad u_i = e\frac{x_i + d}{x_i + G}$$

を仮定して未定定数を定める。条件㉙があるので，加法定理を使って㉙の右辺を整理した結果が完全平方式でなければならない。このことから$\frac{e^2}{a}$，b，dがきまり，㉘を使って aが決まる。結果は

$$a = \frac{A(D^4 + (3 - K^2)D^2 + K^2)}{2B(K^2 - D^2)}$$

$$b = \frac{D^4 + (3K^2 - 1)D^2 + K^2}{D^4 + (3 - K^2)D^2 + K^2}$$

$$e^2 = \left(\frac{1 + D^2}{1 - D^2}\right)^2 \frac{AB}{K^2 - D^4}$$

$$d = \frac{K^2 + D^2}{G(1 + D^2)}$$

② B）式の解

B）式は広田先生のnonlinear networkの理論に関連した方程式で，aを任意定数とし，解が

$$t_i = ax_i$$

$$\therefore v_i = -a^2 D^2 \frac{x_i^2 - C^2}{x_i^2 - D^2}$$ で与えられる。

この時分散関係が

$2A + B = 0$ となる。

③ C）式の解

C）式が

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\dot{m}_i}{m_i} = 4\frac{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}} - \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}}{\tilde{x}_{i-\frac{1}{2}} + \tilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉚ \\ &\tilde{x}_i^2 = 1 + m_{i-\frac{1}{2}}\, m_{i+\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ㉛ \end{aligned} \right.$$

と表わされることは前に述べた。
解を

$$\begin{cases} m_i = a\dfrac{x_i + u}{x_i + 1} \\[2ex] \widetilde{x}_i = b\dfrac{x_i + v}{x_i + G} \end{cases}$$

と仮定して未定の定数を定めることを考える。まず

$$4\frac{\widetilde{x}_{i-\frac{1}{2}} - \widetilde{x}_{i+\frac{1}{2}}}{\widetilde{x}_{i-\frac{1}{2}} + \widetilde{x}_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{\dfrac{8A(v-G)}{L(x_i, G)}\dot{x}_i}{\dfrac{x_{i+\frac{1}{2}} + v}{x_{i+\frac{1}{2}} + G} - \dfrac{x_{i-\frac{1}{2}} + v}{x_{i-\frac{1}{2}} + G}}$$

$$= \frac{4A(D^4 - 2D^2 + K^2)(v-G)}{B(G^2 - D^2)\left(v - \dfrac{D^2}{G}\right)} \cdot \frac{\dot{x}_i}{(x_i + 1)\left(x_i - \dfrac{D^2\left(v - \dfrac{C^2}{G}\right)}{v - \dfrac{D^2}{G}}\right)}$$

ここに

$L(x_i, G) = (G^2 - D^2)(x_i + 1)(x_i + G(2\alpha))$ 及び

$$\frac{x_{i+\frac{1}{2}} + v}{x_{i+\frac{1}{2}} + G} - \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + v}{x_{i-\frac{1}{2}} + G} = \frac{1}{G}\left\{\frac{(G-v)(x_{i+\frac{1}{2}}x_{i-\frac{1}{2}} - G^2)}{(x_{i+\frac{1}{2}} + G)(x_{i-\frac{1}{2}} + G)} + G + v\right\}$$

$$= \frac{2B}{D^4 - 2D^2 + K^2} \cdot \frac{\left(v - \dfrac{D^2}{G}\right)x_i - D^2\left(v - \dfrac{C^2}{G}\right)}{x_i + G(2\alpha)}$$

を使った。($G(2\alpha)$ は倍角の G_0)他方

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} = \frac{(1-u)\dot{x}_i}{(x_i + 1)(x_i + u)}$$ と比較することにより

$$\begin{cases} u = -D^2 \dfrac{v - \dfrac{C^2}{G}}{v - \dfrac{D^2}{G}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{㉜} \\[2ex] 1 - u = \dfrac{4A(D^4 - 2D^2 + K^2)(v - G)}{B(G^2 - D^2)(v - \dfrac{D^2}{G})} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{㉝} \end{cases}$$

㉜㉝を解くと

$$u = \frac{B(D^4 - K^2) + 4A(D^4 - 2K^2 D^2 + K^2)}{B(D^4 - K^2) + 4A(D^4 - 2D^2 + K^2)} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{㉞}$$

$$v = \frac{D^2 + K^2 - 4AG}{G(1 + D^2) - 4A} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{㉟}$$

但し $G = \dfrac{B}{1 - D^2}$ を使った。

次に a^2 を決める。ここで㉜の条件の下で

$$L(x_i, u) = \varepsilon_1 (x_i + G)^2 + \varepsilon_2 (x_i + v)^2 + \varepsilon_3 (x_i + G)(x_i + v)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{D^2 (D^2 - 1)(u + 1)(u^2 - K^2)}{(D^4 - 2D^2 + K^2)(u - G(2\alpha))(u^2 - D^2)} \\[2ex] \varepsilon_2 = \dfrac{(K^2 - D^2)(u - 1)(u + D^2)^2}{(D^4 - 2D^2 + K^2)(u - G(2\alpha))(u^2 - D^2)} \\[2ex] \varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$

が証明される。但し，$G = \dfrac{B}{1 - D^2}$ ，

$G(2\alpha) = \dfrac{D^4 - 2K^2 D^2 + K^2}{D^4 - 2D^2 + K^2}$ を使った。

よって

$1 + m_{i+\frac{1}{2}} m_{i-\frac{1}{2}}$

$$= 1 + a^2 \frac{u^2 - D^2}{1 - D^2} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left(\frac{x_i + v}{x_i + G} \right)^2 \right)$$

$$= \left(1 + \frac{a^2 (u^2 - D^2) \varepsilon_1}{1 - D^2} \right) + \frac{a^2 (u^2 - D^2) \varepsilon_2}{(1 - D^2) b^2} \cdot \widetilde{x}_i^{\,2}$$

これを

$1 + m_{i+\frac{1}{2}} m_{i-\frac{1}{2}} = \widetilde{x}_i^{\,2}$　と比較して

$$a^2 = -\frac{1 - D^2}{\varepsilon_1 (u^2 - D^2)}$$

$$= \frac{(D^4 - 2D^2 + K^2)(u - G(2\alpha))}{D^2 (u + 1)(u^2 - K^2)}$$

$$= \frac{-\{4A(D^4 - 2K^2D^2 + K^2) + B(D^4 - K^2)\}^2}{(D^4 - K^2 + 4AB)\{4A(D^2 + K) + B(D^2 - K)\}\{4A(D^2 - K) + B(D^2 + K)\}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ㊱$$

$$b^2 = \frac{1 - D^2}{a^2 (u^2 - D^2) \varepsilon_2}$$

$$= \frac{(K^2 - D^2)(u - 1)(u + D^2)^2}{D^2 (1 - D^2)(u + 1)(u^2 - K^2)}$$

$$= \frac{4A(K^2 - D^2)(D^4 - K^2)\{B(1 + D^2) - 4A(1 - D^2)\}^2}{B(1 - D^2)(D^4 - K^2 + 4AB)\{4A(D^2 + K) + B(D^2 - K)\}\{4A(D^2 - K) + B(D^2 + K)\}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ㊲$$

㉞, ㉟, ㊱, ㊲で完全な答が求まったことになる。x_i として $dn(x, k)$ をとると

$\left(dn\left((1 + k) u, \frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \right) = \frac{1 - k\, sn^2(u, k)}{1 + k\, sn^2(u, k)}\right.$ で sn^2 に変換可能),

α, β の適当な範囲の中で定数がすべての実数値をとっているのが確かめられる。

④　D）式の解

$$y_i = \frac{1 - z_i}{1 - z_i}$$ であらわすと，z_i は連立形

$$\begin{cases} \dot{v}_i = \dfrac{2\left(z_{i-\frac{1}{2}} - z_{i+\frac{1}{2}}\right)}{1 - z_{i-\frac{1}{2}}\, z_{i+\frac{1}{2}}} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{㊳} \\[2ex] z_i + \dfrac{1}{z_i} = 2\left(v_{i-\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2}}\right) & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{㊴} \end{cases}$$

をみたすことは既にのべた。

解として

$$\begin{cases} z_i = a\dfrac{x_i + P}{x_i + Q} \\[2ex] v_i = b\dfrac{x_i - Z}{x_i - S} \end{cases}$$

という形を仮定して未定の定数を定めることを考えよう。まず $L(x_i, P)$ と $L(x_i, Q)$ が共通根をもつ条件は，二次式の終結式＝0より

$$(PQ + C^2)(PQ + D^2) = D^2(2\alpha)(P + Q)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{㊵}$$

この時

$$L(x_i, Q) = (Q^2 - D^2)(x_i - S)(x_i - U)$$

$$L(x_i, P) = (P^2 - D^2)(x_i - S)(x_i - T)$$

$$L(x_i, S) = (S^2 - D^2)(x_i - P)(x_i - Q)$$

と表わされ，

$$P + Q = -\frac{2BS}{S^2 - D^2} \cdots\cdots\cdots \text{㊶}, \quad PQ = -D^2\frac{S^2 - C^2}{S^2 - D^2} \cdots\cdots\cdots \text{㊷}$$

$$S = \frac{(D^4 - K^2)(P + Q)}{2B(PQ + D^2)} \cdots\cdots \text{㊸}, \quad T = \frac{1}{S}\cdot\frac{K^2 - D^2P^2}{P^2 - D^2} \cdots\cdots \text{㊹},$$

$$U = \frac{1}{S}\cdot\frac{K^2 - D^2Q^2}{Q^2 - D^2} \cdots\cdots \text{㊺}$$

を得る。

㊶ ㊷から，後で用いる公式，

$$f(S^2) \equiv \left\{ (S^2+D^2)P^2 - D^2(S^2+C^2) \right\} \left\{ (S^2+D^2)Q^2 - D^2(S^2+C^2) \right\} = -\frac{4B^2D^2S^2}{(S^2-D^2)^2}(S^2-G^2)(S^2-H^2) \quad \cdots\cdots\cdots ㊻$$

を得る。但し，

$$\frac{(K^2-D^4)^2}{B^2D^2} = 4D^2(2\alpha) = C^2 + D^2 + G^2 + H^2$$

（ $D(2\alpha)$ は倍角の D ）を使った。又㊸ ㊹ ㊺から，後で用いる公式

$$\begin{cases} \dfrac{S-U}{S-T} = \dfrac{P^2-D^2}{Q^2-D^2} \cdot \dfrac{(S^2+D^2)Q^2-D^2(S^2+C^2)}{(S^2+D^2)P^2-D^2(S^2+C^2)} \quad \cdots\cdots\cdots ㊼ \\[2ex] \dfrac{U-T}{S-T} = \dfrac{(K^2-D^4)(P^2-Q^2)}{(Q^2-D^2)\left\{(S^2+D^2)P^2-D^2(S^2+C^2)\right\}} \quad \cdots\cdots\cdots ㊽ \end{cases}$$

を得る。

$$v_i = b\frac{x_i - Z}{x_i - S} \quad \text{としたから}$$

$$v_{i+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{b(S-Z)}{S}\left\{ \frac{x_{i+\frac{1}{2}}\,x_{i-\frac{1}{2}} - S^2}{(x_{i+\frac{1}{2}}-S)(x_{i-\frac{1}{2}}-S)} + \frac{S+Z}{S-Z} \right\}$$

ここで

$$x_{i+\frac{1}{2}}\,x_{i-\frac{1}{2}} - S^2 = \frac{-1}{{x_i}^2 - D^2}\left\{ C_1(x_i+P)^2 + C_2(x_i+Q)^2 + C_3(x_i+P)(x_i+Q) \right\}$$

とすると，

$$C_1 = \frac{(S^2 - D^2)^2 \{(S^2 + D^2)Q^2 - D^2(S^2 + C^2)\}}{4D^2(S^2 - 1)(S^2 - K^2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑰}$$

$$C_2 = \frac{(S^2 - D^2)^2 \{(S^2 + D^2)P^2 - D^2(S^2 + C^2)\}}{4D^2(S^2 - 1)(S^2 - K^2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑱}$$

$$C_3 = \frac{(S^2 - D^2)(S^4 - K^2)}{(S^2 - 1)(S^2 - K^2)}$$

となる。但しここで

$$(P - Q)^2 = \frac{4D^2(S^2 - 1)(S^2 - K^2)}{(S^2 - D^2)^2}$$ を使った。

したがって，

$$v_{i+\frac{1}{2}}\ v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{b(S - Z)}{S}\left\{\frac{-C_1}{a(S^2 - D^2)}\left(z_i + \frac{a^2C_2}{C_1}\ \frac{1}{z_i}\right) + \frac{S + Z}{S - Z} - \frac{C_3}{S^2 - D^2}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{㊾}$$

㊾と $v_{i+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(z_i + \frac{1}{z_i}\right)$ を比較して3つの条件式

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{a^2C_2}{C_1} = 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{㊿} \\[2ex] \dfrac{S + Z}{S - Z} - \dfrac{C_3}{S^2 - D^2} = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{51} \\[2ex] \dfrac{b(S - Z)}{aS(S^2 - D^2)}\ C_1 = -\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{52} \end{array}\right.$$

を得る。

㊿より

$$a^2 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{(S^2 + D^2)Q^2 - D^2(S^2 + C^2)}{(S^2 + D^2)P^2 - D^2(S^2 + C^2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{53}$$

$$=\frac{Q^2-D^2}{P^2-D^2}\ ,\ \frac{S-U}{S-T}\ \cdots\cdots\cdots\ ⑭\quad(\because ㊼)$$

⑸ より

$$Z=\frac{1+K}{2S}\cdot\frac{S^2-\dfrac{2K}{1+K^2}}{S^2-\dfrac{1+K^2}{2}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑮$$

⑸ より

$$b^2=\frac{S^2(S^2-D^2)^2}{4}\cdot\frac{1}{(S-Z)^2}\cdot\frac{a^2}{{C_1}^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑯$$

ここで⑮より

$$\frac{1}{S-Z}=\frac{S(S^2-\dfrac{1+K^2}{2})}{(S^2-1)(S^2-K^2)}$$

⑰，⑬より

$$\frac{a^2}{{C_1}^2}=\left(\frac{4D^2(S^2-1)(S^2-K^2)}{(S^2-D^2)^2}\right)^2\cdot\frac{1}{f(S^2)}$$

$$=-\left(\frac{2D(S^2-1)(S^2-K^2)}{BS(S^2-D^2)}\right)^2\cdot\frac{1}{(S^2-G^2)(S^2-H^2)}$$

が得られるから，これを⑯に代入すると，

$$b^2=-\frac{D^2S^2(S^2-\dfrac{1+K^2}{2})^2}{B^2(S^2-G^2)(S^2-H^2)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑲\ \text{となる。}$$

次にSを決める。

$$\frac{z_{i-\frac{1}{2}}-z_{i+\frac{1}{2}}}{1-z_{i-\frac{1}{2}}\,z_{i+\frac{1}{2}}}=\frac{a(P-Q)\dfrac{2A\dot{x}_i}{L(x_i,Q)}}{1-a^2\dfrac{L(x_i,P)}{L(x_i,Q)}}$$

$$= \frac{2aA\dfrac{P-Q}{Q^2-D^2}\cdot\dfrac{\dot{x}_i}{(x_i-S)(x_i-U)}}{\dfrac{U-T}{S-T}\cdot\dfrac{x_i-S}{x_i-U}} \quad (\because ⑭)$$

$$= \frac{2aA\{(S^2+D^2)P-D^2(S^2+C^2)\}}{(K^2-D^4)(P+Q)}$$

$$\cdot\frac{\dot{x}_i}{(x_i-S)^2} \quad (\because ㊽) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥⓪$$

これを

$$\frac{z_{i-\frac{1}{2}}-z_{i+\frac{1}{2}}}{1-z_{i-\frac{1}{2}}z_{i+\frac{1}{2}}}=\frac{\dot{v}_i}{2}=-\frac{b(S-Z)}{2(x_i-S)^2}\dot{x}_i$$

と比較して

$$-\left(\frac{4A}{K^2-D^4}\right)\left(\frac{1}{P+Q}\right)\left(\frac{a}{b(S-Z)}\right)\Big\{(S^2+D^2)P^2-D^2$$

$$(S^2+C^2)\Big\}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥①$$

㊶ と ⑤② から得られる $\dfrac{a}{b(S-Z)}=\dfrac{-2C_1}{S(S^2-D^2)}$ を代入すると

$$-A(S^2-D^2)^2f(S^2)=BD^2(K^2-D^4)S^2(S^2-1)(S^2-K^2)$$

ここで $f(S^2)$ の表式を用いると,

$$4AB(S^2-G^2)(S^2-H^2)=(K^2-D^4)(S^2-1)(S^2-K^2) \quad \cdots\cdots \quad ⑥②$$

これを解くと

$$S^2=\frac{1}{2\left(1-\dfrac{K^2-D^4}{4AB}\right)}\left\{G^2+H^2-\frac{(1+K^2)(K^2-D^4)}{4AB}\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left\{\frac{(K^2-D^4)(1-K)^2}{4AB}-(G-H)^2\right\}\left\{\frac{(K^2-D^4)(1+K)^2}{4AB}-(G+H)^2\right\}}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥③$$

P，QはL(x_i ，S) = 0 の二根であって解くと，

$$P=\frac{-BS\pm D\sqrt{(S^2-1)(S^2-K^2)}}{S^2-D^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥④$$

$$Q=\frac{-BS\pm D\sqrt{(S^2-1)(S^2-K^2)}}{S^2-D^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥⑤$$

又， P^2 ， Q^2 をP，Qで表わすことにより⑤③から

$$a^2=\frac{BQ(S^2+D^2)+(K^2-D^4)S}{BP(S^2+D^2)+(K^2-D^4)S} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑥⑥$$

を得る。

⑥③，⑤⑤，⑥④，⑥⑤，⑥⑥，⑤⑨は未定であった定数を α と β を使って表わしたもので，完全な答となっている。 x_i としてdn xをとり（ $\mathrm{dn}\left((1+k)u,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)=\frac{1-k\,\mathrm{sn}^2(u,k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u,k)}$ で sn^2 に変換可能），α，β を適当な領域にえらぶと，これらが実数の解であり，又（ $x=d_i+\beta t$ に関して特異でない）普通の wave train の形の解を与えていることを示すこともできる。